ВСТУП

Олімпіадна задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв'язання. Серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв'язання яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але деякі із них можна розв'язувати оригінальними способами.

Практично в кожній олімпіадній роботі зустрічається, як мінімум, одна задача з геометрії. Саме геометричні олімпіадні задачі викликають найбільші труднощі в учнів, і це не тому, що учні погано знають геометрію, а тому, що найбільше штучних прийомів, додаткових побудов використовується саме при розв'язуванні геометричних задач.

Розпочинати роботу по підготовці учасника математичної олімпіади необхідно з самого маленького віку. Коли учні приходять в школу, то з початкових класів слід готувати майбутнього переможця. Задачі на розрізання, склеювання, заміщення, розрізання, ігрові задачі, задачі на складання таблиць істинності, все це під силу самим маленьким учням. Продовжити роботу повинен учитель середніх та старших класів.

Саме з метою допомогти вчителю середніх та старших класів і створена дана робота. Проведення семінару-практикуму в маштабі міста – перший крок до залучення вчителів до проведення позакласної роботи з математики. Це лише перший крок до створення постійно діючого семінару.

В роботі представлені орієнтовні варіанти олімпіадних завдань рівня шкільної та міської олімпіад. Крім звичної математичної олімпіади є різні форми позакласної роботи з математики. Два напрямки такої роботи подані в посібнику. Це математична регата та математична карусель. Такі форми роботи теж є невід'ємним елементом підготовки учнів до участі в математичній олімпіаді, і вони також представлені в роботі.

Дана збірка може бути використана вчителями математики, керівниками гуртків, учнями середніх навчальних закладів та шкіл фізико-математичного профілю при підготовці до олімпіади.

Шкільний етап всеукраїнської олімпіади школярів з математики.

Загальні критерії оцінювання завдань наведено в таблиці.

7	Повне правильне розв’язання
6-7	Повне правильне розв’язання. Є невеликі недоліки, які в цілому не впливають на розв’язання.
5-6	Розв’язання в цілому вірне. Однак воно містить ряд помилок, або не розглянуті окремі випадки, але може стати правильним після невеликих виправлень або доповнень.
4	Правильно розглянуто один з двох (більш складний) істотних випадків, або в задачі типу «оцінка-приклад» вірно отримана оцінка.
2-3	Доведені допоміжні твердження, що допомагають у розв’язанні задачі.
0-1	Розглянуто окремі важливі випадки за відсутності розв’язання (або при помилковому розв’язанні).
0	Розв’язання неправильне, просування відсутні. Розв’язання відсутнє.

Не можна зменшувати кількість балів за те, що розв’язання занадто довге. Виправлення в роботі (закреслення раніше написаного тексту) також не є підставою для зняття балів. У той же час будь-як завгодно довгий текст розв’язання, що не містить корисних просувань, повинен бути оцінений в 0 балів.

Шкільна математична олімпіада 5 клас

1. У лютому деякого року 2419200 секунд. Чи високосним був цей рік? (У високосному році 366 днів, в інших - 365 днів).

Відповідь: рік не високосний.

Розв’язання. Число 2419200 ділиться на 7 (перевіряється безпосередньо). Отже, у лютому 28 днів, а рік - звичайний.

Коментар. Повне розв’язання - 7 балів. Можливі розв’язання з повним обчисленням. У цьому випадку всі викладки повинні бути в розв’язання, тоді оцінка теж 7 балів. Інакше розв’язання оцінюється в 0 балів. Тільки відповідь - 0 балів.

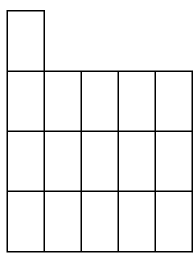
2. Відновити ребус ВОДА +ВОДА = ЗАВОД (однаковим літерам відповідають однакові цифри, різним літерам - різні цифри).

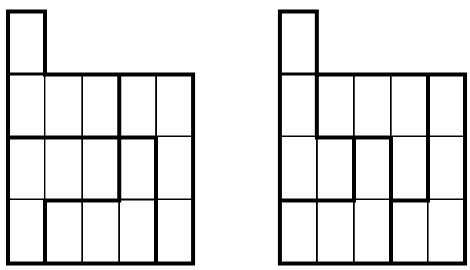
Відповідь: 8947+ 8947 = 17894.

Розв’язання. Зрозуміло, що З = 1 і А ≠ 0 (інакше А = Д = 0). Підставляючи А = 2, 3, ..., 9, знаходимо єдиний розв’язок 8947 +8947 = 17894.

Коментар. Повне розв’язання - 7 балів. Правильна відповідь - 1 бал. Часткові просування або помилки оцінюються в залежності від їх величини та значущості. Якщо перебрано не всі варіанти, оцінка не може бути більшою за 3 балів.

3. Розріжте фігуру по лініях сітки на чотири однакові, що не є прямокутниками.





Розв’язання. Можливі розв’язання наведені на малюнку.

Коментар. Приклад розрізання оцінюється в 7 балів. Доведення, що кожна фігура містить 4 клітинки - 1 бал.

4.Сума 2010 натуральних чисел - непарне число. Яким числом - парним або непарним - є добуток цих чисел?

Відповідь: парним.

Розв'язання. Якби всі числа були непарними, то їх сума була б парною. Отже, серед цих чисел є парне число. Тоді добуток – парний.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Доведення наявності парного доданку - 3 бали. Будь-яка кількість прикладів - 0 балів. Тільки відповідь - 0 балів.

5. У числі 7 ****** 1 замініть зірочки цифрами так, щоб сума будь-яких трьох сусідніх цифр дорівнювала 11. Знайдіть всі розв'язання і доведіть, що інших немає.

Відповідь: 71371371.

Розв'язання. Нехай перша зірочка x, тоді друга 4 - x, третя - 7, четверта знову x, п'ята 4 - x, шоста 7, сьома - x, і вона дорівнює 1. Значить, x = 1, 4 - x = 3.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Відповідь - 1 бал.

Шкільна математична олімпіада 6 клас

1. Чи можна подати число 91 у вигляді суми кількох натуральних чисел, добуток яких також дорівнює 91?

Відповідь: так.

Розв'язання. Можна взяти числа 13 і 7 та сімдесят одну одиницю. І їх добуток,
і їх сума рівні 91.

Коментар. Приклад - 7 балів.

2. Вася склав куб з 27 кубиків, а потім пофарбував його поверхню в синій колір. Потім Петро забрав всі кубики, у яких були пофарбовані хоча б дві грані. Скільки кубиків взяв собі Петро?

Відповідь: 20.

Розв'язання. З 27 кубиків виходить куб 3 × 3 × 3. Вуглові кубики пофарбовані з трьох сторін (їх 8 штук), кубики, які знаходяться на ребрах, але не в вершинах, пофарбовані з двох сторін (їх 12 штук - по одному на кожному ребрі). Решта кубики пофарбовані з одного боку (знаходяться всередині межі) або не пофарбовані зовсім (центральний кубик). Отже, Петро взяв 8 +12 = 20 кубиків.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Відповідь - 1 бал.

3. Петро і Вася розрізали два однакових прямокутника. У Петра вийшло два прямокутники з периметром 40 см кожен, а у Васі - два прямокутники з периметром 50 см кожен. Який периметр мали початкові прямокутники?

Відповідь: 60 см.

Розв'язання. Якщо сторони вихідного прямокутника a і b, то у Петра вийшли периметри, рівні 2a+ b = 40, а у Васі - рівні a +2b = 50. Тоді 3a +3b = 40+ 50 = =90. Звідки 2a+ 2b = 60 - периметри вихідних прямокутників.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Якщо складені рівняння - 2 бали.
Відповідь - 1 бал.

4. На прямій відмітили кілька точок. Після цього між кожними двома сусідніми точками поставили ще по точці. Таку операцію виконали

кілька разів (може бути один раз). В результаті на прямий виявилося 65 точок. Скільки точок могло бути на прямій спочатку?

Відповідь: 2, 3, 5, 9, 17, 33 точок.

Розв'язання. Зауважимо, що коли на прямий відмічено k точок, то проміжків між ними буде k - 1, і якщо у кожний такий проміжок поставити по точці, то всього точок стане
k + (k - 1) = 2k - 1. Тому якщо точок стало 2k - 1 = 65, то перед останньою операцією їх було k = 33. Аналогічно знаходимо, що до цього їх було 17, потім - 9, 5, 3 і 2. Процес міг починатися з будь-якого з етапів.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Тільки відповідь - 1 бал. При втраті випадків кількість балів від 2 до 6.

5. На острові, населення якого становлять тільки лицарі, що говорять правду, і брехуни, які завжди брешуть, знаходиться науково-дослідний інститут (НДІ). Кожний із його співробітників зробив одного разу дві заяви: а) в інституті немає і десятка людей, що працюють більше від мене; б) принаймні сто осіб в інституті отримують зарплату більшу, ніж моя. Відомо, що навантаження у всіх працівників різне, як і зарплата. Скільки людей працює в НДІ?

Відповідь: 110 осіб.

Розв'язання. Розглянемо співробітника, який працює більше всіх інших. Тоді першою заяві він не збрехав, тобто він - лицар. Але тоді і друга його заява - правда, отже, знайдуться 100 чоловік в інституті, які отримують більше нього. Бачимо, що з одного боку перші 10 співробітників, які працюють більше, ніж інші - лицарі, а решта - брехуни. З іншого боку, 100 співробітників, які отримують більше за інших - брехуни, а решта - лицарі. Тому всього лицарів і брехунів 110.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Відповідь - 1 бал. Обчислення кількості лицарів або кількості брехунів - 3 бали.

Шкільна математична олімпіада 7 клас

1. Відновіть ребус КОКА+ КОЛА = ВОДА (однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним буквам - різні цифри).

Відповідь: 3930 3980 = 7910.

Розв'язання. Очевидно, що А = 0. Тоді О ≠ 0,отже, О = 9. Тоді К +К +1 = В. Можливі варіанти

1) К = 1, В = 3, 2) К = 2, В = 5, 3) К = 3, В = 7. К+ Л = 10+ Д (1 переходить в наступний розряд). Перший варіант не підходить, тому що інакше Л = 9, тоді Л співпадає з О. Другий варіант не підходить, оскільки інакше Л = 8 (тоді Д = 0 та А = 0) або Л = 9 (тоді Л збігається з О). У третьому випадку Л = 7, Л = 8, Л = 9. Якщо Л = 7, то Д = 0 і А = 0. Якщо Л = 9, то Л збігається з О. Отже, Л = 8, Д = 1.

Коментар. Повне рішення - 7 балів. Відповідь - 1 бал. Часткові просування або помилки оцінюються в залежності від їх величини та значущості.

2. Вася задумав три різні ненульові цифри. Петро записав всі дев'ять можливих двозначних чисел, у десятковому записі яких використовувалися тільки ці цифри. Сума записаних чисел дорівнює 231. Знайдіть цифри, задумані Василем.

Відповідь: 1, 2 і 4.

Розв'язання. Нехай a, b, c - задумані цифри. Кожна задумана цифра в кожному розряді використовувалася по три рази. Отже, сума записаних чисел дорівнює $3 \cdot 10 \cdot (a+b+c) + 3 \cdot (a+b+c)$. **Звідси a+b+c = 7. Будемо вважати, що**

a <b <c. Тоді a = 1 (так як навіть 2+ 3+ 4> 7), і b+c = 6. Цій рівності задовольняє тільки одна пара різних цифр, серед яких немає 1, b = 2, c = 4.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Відповідь - 1 бал. Якщо доведено, що a+b+c =7 - 3 бали. Якщо разом із цим доведенням подано правильну відповідь без обґрунтування - 4 бали.

3. Знайдіть найменше складене число, яке не ділиться на жодне із натуральних чисел від 2 до 10.

Відповідь: 121.

Розв'язання. Оскільки число складене, то його можна розкласти на два множники, більших від 1. Так як воно не ділиться на жодне натуральне

число від 2 до 10, то обидва множники не менші 11, а саме число не менше 121. Залишилось зауважити, що 121 не ділиться ні на одне натуральне число від 2 до 10.

Коментар. Повне розв’язання - 7 балів. Відповідь - 1 бал. Якщо при правильних міркуваннях отримали число 132 – 4 бали.

4 . Вовк запросив до себе в гості трьох поросят і Червону Шапочку дивитися мультики. Після перегляду Вовк перерахував кекси на кухні і заявив, що двох не вистачає. Як Вовку за два зважування визначити, хто з'їв кекси? Всі кекси важать однаково, всі поросята (принаймні, коли вони тільки прийшли в гості) - теж. Також відомо, що Червона Шапочка на дієті, тому могла з'їсти не більше 1 кексу.

Розв’язання. Очевидно, що іще залишився хоча б один кекс.
Зважуємо двох поросят.
а) Якщо П1 = П2, то можливі випадки:
1) П1 і П2 з'їли по 1 кексу. 2) П3 з'їв 2 кекси. 3) П3 і ЧШ з'їли по 1 кексу.
Друге зважування: порівнюємо П1 + Кекс і П3. Якщо П1+ К> П3, то 1 випадок, якщо П1 + К = П3, то 3 випадок, якщо П1+ К <П3, то 2 випадок.
б) Якщо П1> П2, то можливі випадки:
1) П1 і П3 з'їли по 1 кексу. 2) П1 з'їв 2 кекси. 3) П1 і ЧШ з'їли по 1 кексу.
Друге зважування: порівнюємо П1 і П3 + К. Якщо П1> П3 +К, то 2 випадок, якщо
П1 = П3 +К, то 3 випадок, якщо П1 <П3 +К, то 1 випадок.

Коментар. Повне розв’язання - 7 балів. Часткові просування або помилки оцінюються в залежності від їх величини та значущості. Якщо перебрано не всі варіанти, оцінка не може бути більшою за 3 бали.

Шкільна математична олімпіада 8 клас

1. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел, складений з другим із них, є кубом другого числа.

Розв'язання. Нехай друге число х. Тоді $(x-1)x(x+1)+x=x^3-x+x=x^3$.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Складання правильного алгебраїчного виразу за відсутності подальших просувань або наявність помилки в перетвореннях - 3 бали. Отримання результату x^3+3x^2+3x+1 без подальших просувань - 4 бали.

2. Є лист паперу в клітинку і олівці 6 кольорів. Зафарбуйте найменше число клітин так, щоб для будь-яких двох кольорів знайшлося дві клітини цих кольорів, що граничать по стороні. Доведіть, що менше число клітин зафарбувати не можна.

Відповідь: 12 клітин.

Розв'язання. З умови випливає, що існують клітини кожного кольору. Якщо якогось кольору буде тільки одна клітина, то в неї має бути 5 різнокольорових сусідів, що неможливо. Отже, кожного кольору хоча б по дві клітини, а всього - не менше 12 клітин. Приклад (не єдиний).

1	2	3	4
3	4	5	6
6	1	5	2

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Лише оцінка або лише приклад - 3 бали.

Відповідь - 1 бал.

3. На острові проживають 2010 мешканців, кожен з яких або лицар (завжди говорить правду), або брехун (завжди бреше). Одного разу всі жителі острова розбилися на пари, і кожен про свого напарника сказав одну із фраз: «він лицар» або «він брехун». Чи могло виявитися так, що тих і інших фраз було виголошено порівну?

Відповідь: ні.

Розв'язання. Якщо в парі стоять два лицарі або два брехуни, то вони один про одного скажуть «він лицар». Якщо в парі стоять лицар і брехун, то вони обидва скажуть «він брехун». Таким чином, кожна фраза виголошена

парне число разів. Якби цих фраз було порівну, то кожна фраза пролунала б по 2010: 2 = 1005 разів.
А це число непарне.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Відповідь - 0 балів. Якщо доведено одне з тверджень про пари лицар-лицар або брехун-брехун або брехун-лицар - 1 бал за кожне. Всі твердження разом - 3 бали.

4. ABCD - квадрат, AD = BE = CE. Знайдіть кут AED.

Відповідь: 30 °, 150 °.

Розв'язання. Трикутник BCE - рівносторонній. Можливі два випадки його розташування - усередині квадрата і зовні. У першому випадку кут ABE = 90 ° +60 ° = 150 °,
кут BAE = BEA = 15 °, EAD = EDA = 90 ° - 15 ° = 75 °, AED = 180 ° - 2 · 75 ° = =30 °.
В другому випадку кут ABE = 90 ° - 60 ° = 30 °, кут BAE = BEA = 75 °, EAD = EDA =
=90 ° - 75 ° = 15 °, AED = 180 ° - 2 · 15 ° = 150 °.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Якщо розглянуто один випадок - 3 бали. Якщо наведено тільки відповідь (обидва випадки) - 1 бал. Якщо одну правильну відповіді – 0 балів.

5. Є числа 1, 2, 4, 6. Дозволяється вибрати будь-які два з наявних чисел і помножити їх на одне і те ж натуральне число. Чи можна за кілька таких операцій зробити всі числа рівними?

Відповідь: ні.

Розв'язання: Розглянемо добуток даних чисел. Спочатку він дорівнює 48. Зауважимо, що число 48 не є квадратом натурального числа. Якщо якісь два з даних чисел множаться на деяке натуральне число n, добуток даних чисел множиться на n^2. Отже, якщо воно не було квадратом натурального числа, воно їм і не стане. Але якщо всі наявні числа стануть рівними між собою, то їх добуток буде квадратом. Тому, такими операціями не можна вирівняти наявні числа.

Коментар. Повне розв'язання - 7 балів. Часткові просування або помилки оцінюються в залежності від їх величини та значущості.

Шкільна математична олімпіада 9 клас

1. Ціна квитка на стадіон була 200 грн. Після зниження цін на квитки, кількість глядачів на стадіоні збільшилася на 50%, а виручка з проданих квитків збільшилася на 14%. Скільки став коштувати квиток на стадіон після зниження ціни?

Відповідь. 152.

Розв'язання. **Нехай х - кількість глядачів до зниження ціни, а у - нова ціна квитка. За умовою задачі 1,14 • 200х = 1,5 ху. Звідси у = 152.**

Коментар. Правильна відповідь без жодного обґрунтування оцінюється в 1 бал. Правильно записане рівняння, але з помилкою в подальшому розв'язанні - 4 бали.

2. Про деяке двозначне число зроблені наступні твердження. «Це число або закінчується на 5, або ділиться на 7». «Це число або більше 20, або закінчується на 9». «Це число або ділиться на 12, або менше 21». Знайдіть всі двозначні числа, які задовольняють умовам задачі.

Відповідь. 84.

Розв'язання: **Припустимо, що це число закінчується на 5. Тоді воно не може закінчуватись на 9, а тому, більше 20. Так як ціле число, більше 20, не може бути менше 21, і шукане число ділиться на 12. Але число, що ділиться на 12, парне, і тому не може закінчуватися на 5. Протиріччя. Отже, шукане число ділиться на 7. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і закінчується на 9 - це 49. Але число 49 не ділиться на 12 і більше 21. Протиріччя. Тому шукане число більше 20 і ділиться на 12. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і 12 - це 84.**

Коментар. Відповідь без обґрунтування оцінюється в 1 бал. Відповідь з перевіркою того, що він підходить - 2 бали. Якщо для кожного твердження виписані числа, які підходять для них, а потім з незрозумілих причин обрано правильну відповідь, то ставиться 3 бали. При правильній структурі перебору, але з помилкою, що вплинула на хід розв'язання, - 3 бали. Неправильне розуміння умови (тобто логічних зв'язків) - 0 балів.

3. Знайдіть всі цілі n, при яких число $30n^4+5n^2+10$ буде точним квадратом.

Відповідь. Розв'язків немає.

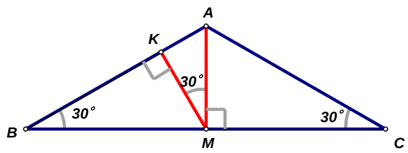
Розв’язання: З рівняння $5(6n^4+n^2+2)=m^2$ випливає, що m є степенем числа 5. Однак $6n^4+n^2+2$ на 5 не ділиться ні за яких n, так як n^4 при діленні на 5 дає остачі 0 або 1, а n^2 при діленні на 5 дає остачі 0, 1 або 4.

Коментар. Відповідь без обґрунтування оцінюється в 1 бал. Правильна відповідь і зауваження, що квадрат числа повинен ділитися на 5-2 бали. Можливі подальші просування в розв’язанні, які слід оцінювати.

4. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 120°. З середини основи опущено перпендикуляр на бічну сторону. В якому відношенні основа перпендикуляра ділить бічну сторону?

Відповідь. 3: 1, рахуючи від вершини основи.

Розв’язання. Нехай у трикутнику ABC AB = AC, тоді $\angle$ BAC = 120°. Позначимо: M - середину BC, K - основа перпендикуляра, опущеного з точки M на сторону BC. Так як $\angle$AMK = $\angle$ ABM = 30°, то $\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$, $\mathrm{AK}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}$, тобто $\mathrm{AK}=\frac{1}{4}\mathrm{AB}$. Отже, $\frac{BK}{KA}=\frac{1}{3}$.



Коментар. Відповідь без обґрунтування оцінюється в 1 бал. Доведення кожного із тверджень $\mathrm{AM}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$ і $\mathrm{AK}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}$ оцінюється в 1 бал.

5. У бригаді 101 кабан. Всі вони ходять на город групами їсти картоплю, причому кожні двоє ходили на город разом рівно по разу, однак вся бригада за один раз на картоплю не ходила. Доведіть, що один з кабанчиків брав участь не менше, ніж у 11 походах за картоплею.

Розв’язання. Нехай в деякому поході беруть участь не менше 11 кабанчиків. Тоді будь-який з кабанчиків, що не брали участі у цьому поході, сходить за картоплею не менше 11 разів з кожним з учасників. Якщо ж у кожний похід ходило не більше 10 кабанчиків, то будь-який кабанчик брав участь не менш, ніж у 11 походах, так як він повинен сходити разом з кожним із 100 інших кабанчиків.

Коментар. Доведення твердження задачі для випадку, коли в поході беруть участь не менше 11 кабанчиків, оцінюється в 3 бали. Розгляд випадку, коли в кожний похід ходило не більше 10 кабанчиків - 3 бали.

Шкільна математична олімпіада 10 клас

1. Про деяке двозначне число зроблені наступні твердження. «Це число або закінчується на 5, або ділиться на 7». «Це число або більше 20, або закінчується на 9». «Це число або ділиться на 12, або менше 21». Знайдіть усі двозначні числа, які задовольняють умовами задачі.

Відповідь. 84.

Розв'язання. Нехай остання цифра числа дорівнює 5. Тоді воно не може закінчуватися на 9, а отже, більше 20. Так як ціле число, більше 20, не може бути менше 21,то шукане число ділиться на 12. Але число, що ділиться на 12, парне, і тому не може закінчуватися на 5. Протиріччя. Це означає, що шукане число ділиться на 7. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і закінчується на 9 - це 49. Але число 49 не ділиться на 12 і більше 21. Протиріччя. Тому шукане число більше 20 і ділиться на 12. Єдине двозначне число, що ділиться на 7 і 12 - це 84.

Коментар. Відповідь без обґрунтування оцінюється в 1 бал. Відповідь з перевіркою того, що він підходить - 2 бали. Якщо для кожного твердження виписані числа, які підходять для них, а потім з незрозумілих причин обрано правильну відповідь, то ставиться -3 бали. При правильній структурі перебору, але з помилкою, що вплинула на хід розв'язання –
3 бали. Неправильне розуміння умови (тобто логічних зв'язків) - 0 балів.

2. На розпродажі жуків одного жука продавали за 1 грн. При цьому до кожних десяти куплених жуків один давався безкоштовно, а за кожну сотню оплачених жуків іще дарували 5. Заплативши всі свої гроші, Олена отримала 200 жуків. Скільки в неї було грошей?

Відповідь. 178 грн.

Розв'язання. **Нехай** $\overline{xyz}$ **рублів було у Олени. На ці гроші вона купила** $\left(\overline{xyz}+10\overline{xy}+5x\right)$ **жуків. Отримуємо рівняння** $115x+11y+z=200$**, де x, y, z - цілі числа від 0 до 9. Якщо x = 0, то** $115x+11y+z\le 11\cdot 9+9=108.$ **Якщо x ≥ 2, то вже 115x ≥ 230. Отже, залишився випадок, коли x = 1. Тоді** $11y+z=85.$ **Невеликим перебором отримуємо єдиний розв'язок: y = 7, z = 8.**

Коментар. Відповідь без обґрунтування - 1 бал. Складання рівняння виду $115x+11y+z=200$ оцінюється в 2 бали.

3. 1000 доларів розклали по гаманцях, а гаманці розклали по кишенях. Відомо, що всього гаманців більше, ніж доларів в будь-якій кишені. Чи

вірно, що кишень більше, ніж доларів в будь-якому гаманці? (Класти гаманці один в другий не дозволяється).

Відповідь. Вірно.

Розв'язання.
Нехай n - кількість кишень, s - кількість гаманців, a_k - кількість грошей в k-ій кишені, b_l - кількість грошей в l-му гаманці. За умовою задачі $a_k \prec s, 1000 = a_1 + a_2 +_{...} + a_n \prec s \cdot n$. Припустимо, що в кожному гаманці доларів не менше, ніж кількість кишень, тобто $b_l \geq n$. Тоді. $1000 = b_1 + b_2 +_{...} + b_s \geq s \cdot n$ **Протиріччя.**

Коментар. Відповідь без обґрунтування оцінюється в 0 балів. За доведення співвідношення виду $sn \succ 1000$ без подальшого просування - 2 бали. Доведення нерівності виду $sn \leq 1000$ також оцінюється у 2 бали.

4. Розв'яжіть рівняння: $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$

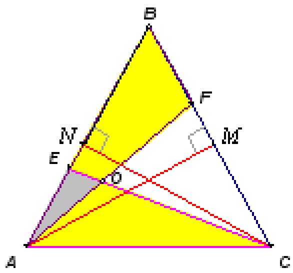
Відповідь. -9; 11.

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді: $(x \;\; +1)^2 - (2x + 100)^2 = 0.$ **Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, отримаємо** $x^2 + 2x + 101 = 0$ **або -** $x^2 - 2x - 99 = 0.$ **Перше з квадратних рівнянь коренів не має, а коренями другого рівняння є числа: -9 і 11.**

Коментар. Відповідь без обґрунтування - 1 бал. Подання рівняння у вигляді $(x^2 + 2x + 101)(x^2 - 2x - 99) = 0$ без подальшого розв'язання - 3 бали. Можливі інші міркування, які також оцінюються відповідно до загальних критеріїв.

5. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC взято точки E та F відповідно. Відрізки EC та FA перетинаються в точці O. Доведіть, що якщо площа чотирикутника BEOF дорівнює площі трикутника ACO, то AE = BF.

Розв'язання. З рівності площ в умові завдання слідує, що трикутники ABF і ACE рівновеликі, так як їх площі отримуються додаванням площі трикутника EOA до рівних площ.



Так як трикутник ABC - рівнобедрений, то його висоти AM і CN рівні, при цьому AM та CN є також висотами трикутників ABF та CAE відповідно. Отже, будуть рівні і відповідні цим висотам основи, тобто BF = AE, що і було потрібно.

Коментар. Доведення рівності площ трикутників ABF та ACE –2 бали.

Шкільна математична олімпіада 11 клас

1. Коли пасажири увійшли в порожній трамвай, 2 / 7 їх зайняли місця для сидіння. Скільки пасажирів увійшло в самому початку, якщо після першої зупинки їх кількість збільшилася рівно на 15% і відомо, що трамвай вміщає не більше 180 осіб?

Відповідь. 140.

Розв'язання. З умови видно, що число пасажирів ділиться на 7 і на 20 (15% становить 3 / 20 від загальної кількості). Отже, кількість пасажирів з самого початку ділилася на 140, але вона була меншою за 180, а тому дорівнювала 140. (Всього після першої зупинки - 161 чоловік.)

Коментар. Відповідь без обґрунтування - 1 бал. Доведення того, що число пасажирів, які увійшли ділиться на 7 - 1 бал. Доведення подільності на 20 - також 1 бал.

2. У ящику лежать 111 кульок червоного, синього, зеленого і білого кольорів. Якщо, не заглядаючи в ящик, витягти 100 кульок, то серед них обов'язково знайдуться 4 кульки різних кольорів. Яке найменше число кульок потрібно витягнути, не заглядаючи в ящик, щоб серед них обов'язково знайшлися 3 кульки різних кольорів?

Відповідь. 88.

Розв'язання. З умови задачі слідує, що кулька кожного кольору не менше 12. Отже, кульок будь-яких двох кольорів не менше 24 і достатньо витягнути із ящика 111-23=88 кульок. Якщо в ящику по 12 кульок двох кольорів, то можна витягнути 87 кульок тільки двох інших кольорів, тобто 87 кульок не вистачає.

Коментар. Доведення того, що досить 88 кульок - 3 бали. Приклад, який показує, що 87 кульок не вистачить - 2 бали.

3. Знайдіть у натуральних числах всі корені рівняння
   НСК (a, b) = НСД (a, b) +10, де $a \leq b$.

Відповідь. (1; 11), (2; 12), (4, 6), (5; 15), (10; 20).
Розв'язання: Нехай a = dc, b = de, де c і e - взаємно прості числа. Тоді dce = =d +10, тобто d може дорівнювати 1, 2, 5 і 10. Якщо d = 1, то c = 1, e = 11. Якщо d = 2, то ce = 6, c= 1, e = 6 і c = 2, e = 3. Якщо d = 5, то ce = 3, c = 1, e = 3. Якщо d = 10, то ce = 2,c = 1, e = 2.

Коментар. Наявність у відповіді без обґрунтувань чотирьох або п'яти правильних відповідей - 1 бал. За знаходження з поясненням однієї пари розв'язків - 1 бал, 2-3 пари розв'язків - 2 бали, 4-5 пар розв'язків без доведення того, що інших розв'язків немає - 3 бали.

4. В трапецію вписано коло радіуса r. Знайдіть площу трапеції, якщо кути при більшій основі рівні α та β.

Відповідь. $2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Розв'язання. Нехай AB - більша основа трапеції ABCD, $\angle$DAB = α, $\angle$CBA =β. Проведемо висоти трапеції DP і CQ, кожна з яких дорівнює діаметру вписаного кола. Трикутники ADP та BCQ - прямокутні, тому $AD=\frac{DP}{\sin\alpha}=\frac{2r}{\sin\alpha}, BC=\frac{CQ}{\sin\beta}=\frac{2r}{\sin\beta}$**. Так як дана трапеція - описана,**

то AB +CD = AD+BC. Отже, $S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=(AD+BC)r=2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Коментар. Завдання оцінюється за загальними критеріями.

5. Кожне натуральне число пофарбували в один з двох кольорів: синій або жовтий. Чи вірно, що знайдуться два різних числа одного кольору, середнє арифметичне яких - натуральне число того ж кольору?

Відповідь. Вірно.

Розв'язання. **Припустимо, що всі парні числа, більші або рівні 2n, де n - будь-то натуральне число, пофарбовані в один і той самий колір. Оскільки будь-яке парне число є середнім арифметичним двох сусідніх з ним парних чисел, то всі парні числа починаючи з 2n +2 - середнє арифметичне чисел того ж кольору. Нехай тепер є скільки завгодно великі парні числа кожного кольору. Тоді знайдеться синє число 2m, таке що 2m +2 - жовте, і жовте число 2n> 2m +2 таке, що число 2n +2 - синє. Середнє арифметичне чисел 2m і 2n+ 2 дорівнює m+n +1 і дорівнює середньому арифметичному чисел 2m +2 і 2n. Оскільки перша пара чисел - синя, а друга пара - жовта, то число m+n+1 збігається за кольором з однією з них.**

Коментар. Завдання оцінюється за загальними критеріями.

Міський етап математичної олімпіади

7 клас

1. У продавця є шалькові терези і необмежена кількість п'яти і семиграмових гир. Чи можна з їх допомогою за один раз точно зважити n грамів товару, де n – довільне натуральне число?

Відповідь: можна.

Розв'язання. Покажемо, як продавець може точно зважити 1, 2, 3, 4, 5 г товару:
5 г+ 5 г+ 5 г = 7 г+ 7 г+(1 г); 7 г = 5 г+(2 г); 5 г+5 г = 7 г+(3 г); 7 г+7 г = =5 г+5 г+(4 г); 5 г = (5 г). Ясно, що, додаючи 5-грамові гирі, в першому випадку можна точно зважити 6 г, 11 г, 16 г, ..., тобто (5 k +1) г, у другому – (5 k +2) г, у третьому - (5 k +3) г; в четвертому - (5 k +4) г; у п'ятому – (5 k +5) г. А так як будь-яке натуральне число можна подати в одному із зазначених виглядів, то за один раз можна точно зважити будь-яке натуральне число грамів товару.

Коментар. Показано тільки, як продавець може точно зважити 1, 2, 3, 4, 5 г товару без достатніх обґрунтувань, що можна зважити будь-яке інше число грамів - 2-3 бали.

2. Є 12 стержнів довжиною 1, 2, ..., 12. Чи можна скласти з усіх цих стержнів контур квадрата, і якщо не можна, то яку найменшу кількість стержнів потрібно зламати навпіл, щоб скласти контур квадрата (навести приклад)?

Відповідь: не можна; потрібно зламати навпіл мінімум 2 стержні.

Розв'язання. Так як сума 1+2 ...+12 = 78 не ділиться на 4, то скласти з усіх цих стержнів контур квадрата не можна (сторона квадрата повинна бути 78:4=19,5). Якщо зламати тільки один стержень, то його частини можуть опинитися на двох різних сторонах квадрата, а інші дві сторони не зможуть мати неціле довжину. Тому потрібно зламати як мінімум два стержні. З двома зламаними стержнями скласти квадрат можна, наприклад, так: зламаємо навпіл стержні довжини 1 і 3, і нехай сторони квадрата будуть (0,5+12+7), (0,5+11+8), (3,5+10+2+6) і (1,5+9+5+4).

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 1 бал. За стверджування, що довжина сторони квадрата - неціле число і тому потрібно зламати хоча б 1 стержень - 2 бали. Доведення того, що необхідно зламати не менше двох стержнів (але без прикладу) оцінюється в 3 бали.

3. Швидкість бігуна А в 3 рази більше швидкості бігуна Б, а один кілометр він пробігає на 10 хвилин швидше. Скільки кілометрів кожен з них пробігає за годину?

Відповідь: 12 кілометрів і 4 кілометри.

Розв'язання. 1. Так як бігун А пробігає кілометр в 3 рази швидше, ніж бігун Б, то різниця в часі, за який пробігає кілометр Б, і часом, за який пробігає кілометр А, в 2 рази більша часу, за який пробігає кілометр А. Отже, А пробігає кілометр за 5 хвилин. Тоді за годину А пробігає 12 кілометрів, а Б - 4 кілометри.
Розв'язання. **2**. Нехай v - швидкість в км/год бігуна Б, 3v - швидкість бігуна А, t - час у год, за який А пробігає один кілометр. Тоді 3vt = v (t +1 / 6) = 1, звідки v = 4.

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 1 бал. За складання рівняння без подальшого вірного розв'язання - 3 бали.

4. Різні натуральні числа x, y, z збільшили на 1, 2 і 3 відповідно. На яку найбільшу величину могла змінитися сума їх обернених величин?

Відповідь: 13/12.

Розв'язання. Сума обернених величин зменшилася на
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z+3}=\ldots=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{y(y+2)}+\frac{3}{z(z+3)}.$$

Цей вираз буде набувати найбільшого значення тоді, коли знаменники дробів будуть найменшими можливими числами. Так як три найменших натуральних числа це 1, 2 і 3, то для шести наборів (x, y, z) (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2 , 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) отримуємо значення різниці сум обернених величин:. Найбільше значення одне 13/12.

Коментар. Правильна відповідь без обгрунтувань - 1 бал. За отримання виразу
$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{y(y+2)}+\frac{3}{z(z+3)}$ **без правильної відповіді – 1 бал. Запис виразу з додатковими твердженнями, що значення виразу буде найменшим, коли числа рівні 1,2,3, але з неправильним вибором набору (наприклад (2,1,3) з відповіддю 1) оцінюється в 3 бали.**

5. Боря і Ваня грають в наступну гру. За один хід можна помножити записане на дошці число на будь-яке натуральне число від 2 до 9,

записати отримане число на дошці, а старе число стерти. Ходи робляться по черзі. Виграє той, хто першим отримає число, більше 1000. Першим ходить Боря. Хто виграє при правильній грі?

Відповідь: Боря.

Розв’язання. Нехай першим ходом Боря примножить 1 на 6 (першим ходом Боря може помножити 1 на 4 або 5; це також призводить до виграшу). Ваня може отримати числа 12, 18, 24, ..., 54. Для кожного числа підбором множника Боря, щоб виграти, повинен отримати число з проміжку від 56 до 111. Він може це зробити, наприклад, так: 12 • 5, або 18 • 4, або 24 • 3, або будь-яке з чисел, що залишилися множаться на 2. Одним ходом не можна з чисел у вказаному проміжку отримати число, більше 1000. Проте Боря наступним своїм ходом, множачи будь-яке записане після ходу Вані число на 9, отримує число, більше 1000.

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 0 балів. Правильне описання виграшної стратегії, але з неповним обґрунтуванням оцінюється в 4-6 балів. Окремі вірні твердження без чіткого описання ігрової стратегії, що призводить до виграшу, можуть бути оцінені в 1-3 бали.

Міська математична олімпіада 8 клас

1. В коробці 36 кольорових кульок. Відомо, що серед будь-яких шести з цих кульок знайдуться хоча б 2 кульки одного кольору. Доведіть, що в коробці знайдеться 8 кульок одного кольору.

Розв’язання. Припустимо, що кульок кожного кольору не більше семи. Це означає, що різних кольорів не менше шести (інакше кількість кульок не більше 7 • 5 = 35). Тоді взявши по одній кульці кожного з 6 кольорів, отримаємо протиріччя з умовою задачі.

Коментар. Завдання оцінюється за загальними критеріями.

2. Є 199 металевих стержнів довжиною 1, 2, 3, ..., 198, 199. Чи можна зварити з цих стержнів а) каркас куба, б) каркас прямокутного паралелепіпеда? (Потрібно використовувати всі стержні).

Відповідь: Куб - не можна, паралелепіпед - можна.

Розв’язання. а) Так як сума 1+2+ ...+199 = 1990 не ділиться на 12, то зварити каркас куба не можна. б). $1990 = 4 \cdot 25 \cdot 199$**. Зварюємо 99 пар**

стержнів: 1+198, 2+197, ..., 99+100 і соте ребро - 199. З отриманих при цьому 100 ребер можна зварити прямокутні паралелепіпеди розміром: $199n \times 199m \times 199(25 - n - m)$.

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 1 бал. За стверджування, що довжина сторони куба - неціле число (1990 не ділиться на 12), і тому куб не можна зварити - 2 бали. Наявність доведення а) і того, що можна зварити паралелепіпед, але без прикладу, оцінюється в 3 бали; якщо наведено правило зварювання без прикладу - 4 бали, наведено правило зварювання з одним конкретним прикладом - 6 балів.

3. На сторони AB і BC трикутника ABC взяли точки M і N відповідно. Виявилося, що периметр трикутника AMC дорівнює периметру трикутника CNA, а периметр трикутника ANB дорівнює периметру трикутника CMB. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

Розв'язання. Нехай P, P_1, P_2, P_3, P_4 **- периметри трикутників ABC, AMC, ANB, CNA, CMB відповідно. З умови задачі отримаємо** $P_1 + P_4 = P_3 + P_2$**. З цього слідує** $P + 2 \cdot CM = P + 2 \cdot AN$**. Тому CM = AN. З цього співвідношення, враховуючи рівність периметрів трикутників AMC і CAN, отримаємо, що AM = NC. Тому трикутники AMC і CAN рівні за трьома сторонами. Тоді** $\angle$**A =** $\angle$**C і трикутник ABC рівнобедрений**.

Коментар. За доведення рівності CM = AN без просувань в розв'язанні - 2 бали. За доведення ще й рівності AM = NC без подальших просувань у рішенні - 3 бали.

4. На дошці написано число 1. Боря і Ваня грають в гру. За один хід можна помножити записане на дошці число на будь-яке натуральне число від 2 до 9, записати отримане число на дошці, а старе число стерти. Ходи робляться по черзі. Виграє той, хто першим отримає число, більше 1000. Першим ходить Боря. Хто виграє при правильній грі?

Відповідь: Боря.

Розв'язання. Нехай першим ходом Боря помножить 1 на 6 (першим ходом Боря може помножити 1 на 4 або 5; це також призводить до виграшу). Ваня може отримати числа 12, 18, 24, ..., 54. Для кожного числа підбором множника Боря, щоб виграти, повинен отримати число з проміжку від 56 до 111. Він може це зробити, наприклад, так: 12 • 5, або 18 • 4, або 24 • 3, або будь-яке з чисел, що залишилися множиться на 2. Одним ходом не можна з чисел у вказаному проміжку отримати число, більше 1000. Проте Боря наступним своїм ходом, множачи будь записане після ходу Вані число на 9, отримує число, більше 1000.

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 0 балів. Правильне описання виграшної стратегії, але з неповним обґрунтуванням оцінюється в 4-6 балів. Окремі вірні твердження без чіткого опису ігрової стратегії, що приводить до виграшу, можуть бути оцінені в 1-3 бали.

5. У групі з 19 чоловік кожен або завжди говорить правду (лицар), або завжди бреше (брехун). Групу посадили за круглий стіл, і кожен з 19 чоловік сказав, що обидва його сусіда - брехуни. Після цього частина групи пішла, а кожен з решти сказав, що тепер обидва його сусіда - лицарі. Останній, серед тих хто виходив, сказав, що залишилися одні лицарі. Ті, хто пішов, сіли за другий круглий стіл, і кожен з них сказав, що серед двох його сусідів рівно один - лицар. Скільки чоловік залишилося сидіти за першим столом?

Відповідь: 7.

Розв'язання. **З перших тверджень випливає, що ніякі два лицарі і ніякі 3 брехуни не могли сидіти поруч. Отже, лицарів було не більше половини і не менше третьої частини від загальної кількості людей. Тоді лицарів могло бути 7, 8 або 9 чоловік. Припустимо, що серед що залишилися за столом є і лицарі, і брехуни. Тоді сусідом якогось лицаря є брехун, і лицар не міг сказати, що обидва його сусіда - лицарі. Таким чином, після виходу кількох людей залишилися або тільки всі лицарі, або тільки всі брехуни. Якщо залишилися тільки лицарі, то останній з тих, хто виходив теж був лицарем. За другим столом поряд з лицарем повинні сидіти лицар і брехун, а поруч з брехуном - два лицаря. Тому серед тих, хто пішов, лицарі повинні складати дві третини від загальної кількості, що суперечить тому, що лицарів не більше 9 чоловік. Отже, залишилися тільки брехуни, а серед тих, хто пішов було вдвічі більше лицарів, ніж брехунів. Це можливо, якщо лицарів було 8. Отже, пішли всі 8 лицарів і 4 брехуна, а залишилися 7 брехунів.**

Коментар. Правильна відповідь без обґрунтувань - 0 балів. За доведення того, що лицарів може бути 7, 8 або 9 (без подальшого розв'язання) - 2 бали. Якщо іще доведено, що після виходу кількох людей за столом залишаться або одні лицарі, або одні брехуни, то оцінка - 3 бали. Правильне розв'язання без доведення того, що за столом не могли залишитися лицарі, оцінюється в 5 балів.

Міська математична олімпіада 9 клас

1. Знайдіть всі цілі значення **а**, при яких рівняння $x^2 + ax + a = 0$ має цілий корінь.

Відповідь. 0 і 4.

Розв'язання 1. x_1 **та** x_2 - корені даного рівняння. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 \cdot x_2 = a \Rightarrow (x_1+1)\cdot(x_2+1) = (x_1+x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = 1$. Оскільки a і x_1 цілі, то x_2 теж ціле і числа (x_1+1) та (x_2+1) також цілі, тому або $(x_1+1)=1$ та $(x_2+1)=1$, або $(x_1+1)=-1$ та $(x_2+1)=-1$. Тоді 1) $x_1 = x_2 = 0$, $a = 0,$ або 2) $x_1 = x_2 = -2,\ a = -4.$

Розв'язання 2. Дискримінант повинен бути повним квадратом, тобто
$D = a^2 - 4a = n^2 \Rightarrow (a-2)^2 = n^2 + 4 \Leftrightarrow (a-2)^2 - n^2 = 4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a - 2 - n = 2,-2,-1,-4,1,4 \\ a - 2 + n = 2 = 2,-2,-4,-1,4,1 \end{cases} \Rightarrow 2a - 4 = 4,-4 \quad a = 4, a = 0.$$

Коментар. Знайшов обидва правильні відповіді підбором - 1 бал.

2. Доведіть, що, $a + b \succ \left(\sqrt{2010} + \sqrt{2011}\right)^2, \textit{якщо } a \succ 0, b \succ 0$ та $a \cdot b \succ 2010a + 2011b.$
.

Розв'язання. Так як $a, b \succ 0$**, то з нерівності** $a \cdot b \succ 2010a + 2011b$ **отримуємо, що** $a \succ 2010\frac{a}{b} + 2011$ **та** $b \succ 2010 + 2011\frac{b}{a}$. **Додаючи ці нерівності, отримаємо:.**

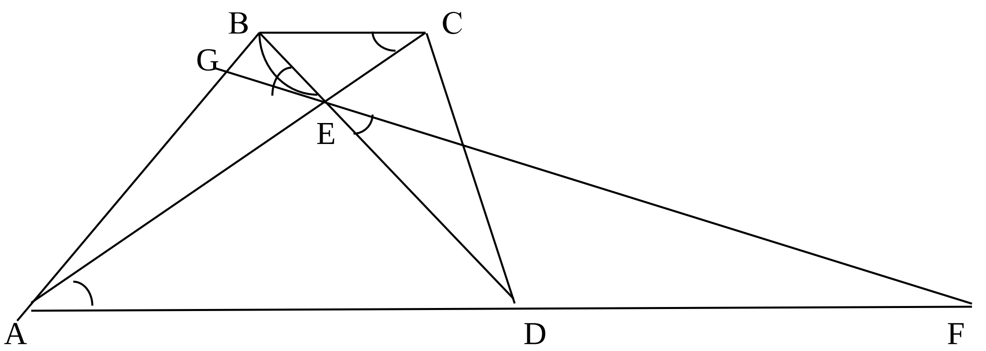
$$a + b \succ 2010 + 2011 + \left(2010\frac{a}{b} + 2011\frac{b}{a}\right) \geq 2010 + 2011 + 2\sqrt{2010\frac{a}{b} \cdot 2011\frac{b}{a}} = \left(\sqrt{2010} + \sqrt{2011}\right)^2.$$

Коментар. Записав перші дві нерівності - 1 бал, іще третє - 2 бали.

3. В трапеції АВСД з основами АД та ВС діагоналі АС і ВД перетинаються в точці Е. Навколо трикутника ЕСВ описано коло, а дотична до цього кола, проведена в точці Е, перетинає пряму АД в точці F таким чином, що точки А,Д, F лежать послідовно на цій прямій. Відомо, що AF=a, АД=b. Знайти EF.

Відповідь. $\sqrt{a \cdot (a-b)}$.

Розв'язання.



На малюнку зображена задана умовою задачі конфігурація. Доведемо, що трикутники AEF і EДF подібні. Так як, АД║ВС, то $\angle FAД = \angle ECB$ **(як внутрішні різносторонні).** $\angle ECB = \angle BEG$ **(спираються на одну дугу).** $\angle BEG = \angle FEД$ **(як вертикальні). Отже, маємо рівності кутів** $\angle FAE = \angle ECB = \angle BEG = \angle FEД$ **. Трикутники AEF та EДF мають спільний кут** $\angle AFE$ **і пару рівних кутів** $\angle FAE = \angle FEД$ **, отже, ці трикутники подібні і їх відповідні сторони пропорційні, тобто** $ДF \div EF = EF \div AF \Rightarrow \sqrt{AF \cdot ДE} = \sqrt{a(a-b)}.$

Коментар. Вказані якісь подібні трикутники - 1 бал.

4. Чи можна в таблицю 50×50 записати числа від 1 до 2500 так, щоб сума чисел в кожному рядку і кожному стовпці: а) була непарному, б) не ділилася на 5?

Відповідь. а) Можна, б) Можна.

Розв'язання.
а) Можна. Розфарбуємо таблицю в кольори шахової дошки і впишемо в чорні клітини парні числа, а в білі - непарні. Тоді в кожному рядку і в кожному стовпці будуть по 25 парних чисел і по 25 непарних, і в кожному рядку і в кожному стовпці сума всіх 50 чисел буде непарною.
б) Можна. Впишемо в таблицю підряд всі числа від 1 до 2500, починаючи з лівого верхнього кута зліва направо у порядку зростання, заповнюючи таким способом спочатку перший рядок, потім другий і т. Після цього всі числа на діагоналі, що йде з лівого верхнього кута, циклічно пересуваємо на одну клітинку вниз направо (останнє число на діагоналі стане на місце першого). При цьому учень повинен показати, що сума чисел в кожному рядку і в кожному стовпці до зсуву була кратна п'яти, а після зсуву вже не кратна п'яти.

Коментар. Обґрунтовано відповідь тільки у випадку а) - 2 бали. Дано одну або обидві правильних відповіді, але без обґрунтувань - 0 балів. Дано обидві правильних відповіді, але без обґрунтувань - 1 бал.

5. Фабрика розфарбовує кубики в 6 кольорів (кожну грань у свій колір, набір кольорів фіксований). Скільки різновидів кубиків можна виготовити?

Відповідь: 30 різновидів.

Розв’язання. Припустимо, що процедура розмальовки кубика відбувається наступним чином: нерозфарбований кубик встановлюється в деяке фіксоване положення, а потім послідовно фарбуються його грані в певному порядку - нижня, верхня, права, ліва, передня, задня. Підрахуємо спочатку, скількома способами можна здійснити таку розфарбовку. Нижню грань ми можемо пофарбувати в будь-який з шести кольорів. Після цього для верхньої грані залишається лише п'ять можливостей, оскільки один колір вже використали. Потім праву грань ми зможемо пофарбувати чотирма способами, ліву - трьома, передню - двома, а вибору для задньої грані немає - її ми змушені пофарбувати в колір, що залишився. Тому всього способів розфарбовки $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$. Проте ж різновидів кубиків набагато менше, оскільки встановити кубик в фіксоване положення можна різними способами. Скількома? Кубик можна встановити на будь-яку з шести граней і потім повернути одним з чотирьох способів - отримуємо всього $6\cdot4=24$ способи. Тому різновидів кубиків в 24 рази менше, ніж способів розфарбовки, їх всього 30.

Коментар. Відповідь 120 з обґрунтуванням - 2 бали, відповідь 720 - 1 бал.

Міська математична олімпіада 10 клас

1. Знайти многочлен найменшого степеня з цілими коефіцієнтами, для якого число $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ є коренем. Знайти інші корені та добуток всіх коренів.

Відповідь. $x^4-20x^2+16.$ $x_{1-4}=\pm\left(\sqrt{7}\pm\sqrt{3}\right)$, добуток коренів дорівнює 16.

Розв’язання. Покладемо $x=\sqrt{7}+\sqrt{3}\Rightarrow x^2=10+2\sqrt{21}\Rightarrow x^4=184+40\sqrt{21}\Rightarrow$ $x^4-20x^2+16=0.\Rightarrow x^2=10\pm2\sqrt{21}\Rightarrow x_{1-4}=\pm\left(\sqrt{7}\pm\sqrt{3}\right)$**, а добуток коренів дорівнює 16 (вільний член рівняння). Многочлена меншого степеня не існує, тому що числа**

$x, x^2, x^3\left(x^3 = 7\sqrt{7} + 3\sqrt{147} + 3\sqrt{63} + 3\sqrt{3}\right)$ **неспівмірні, оскільки неспівмірними є числа**
$\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{21}, \sqrt{63}, \sqrt{147}$ **(перевірка неспівмірності повинна бути проведена в тексті розв'язання!). Існує нескінченно багато многочленів більш високого степеня.**

Коментар. Наведено правильний многочлен, правильно знайдені всі інші корені і їх добуток без обґрунтування того, що немає многочлена меншого степеня - 4 бали; якщо іще є згадка про неспівмірність- 5 балів. Якщо неспівмірність і відсутність многочленів менших степенів обґрунтовані - 6 -7 балів.

2. В трапеції ABCD з бічними сторонами AB = 9 і CD = 5 бісектриса кута D перетинає бісектриси кутів A і C в точках M і N відповідно, а бісектриса кута B перетинає ті ж бісектриси в точках L та K, причому точка K лежить на основі AD.

   а) В якому відношенні пряма LN ділить сторону AB, а пряма MK - сторону CB?
   б) Знайти відношення MN: KL, якщо LM: KN = 3: 7.

Відповідь. а) 1: 1, 5: 9, б) 5: 21

Розв'язання. Нехай AM і DM - бісектриси кутів A і D відповідно, точка K лежить на стороні AD, причому BK і CK - бісектриси кутів B і C відповідно. Тоді трикутники ABK і DCK - рівнобедрені, AK = 9, DK = 5, KL = LB і KN = NC, так що LN - середня лінія трикутника KBC. Тому пряма ділить бічні сторони навпіл, тобто 1: 1.

Проведемо тепер пряму KM, і нехай P - точка перетину KM і BP, а T - точка перетину KM і LN. Тоді $\frac{CP}{BP} = \frac{NT}{LT}\frac{DK}{AK} = \frac{DC}{AB} = \frac{5}{9}.$

Чотирикутник KLMN – вписаний в коло з діаметром KM, тому трикутник TKL подібний трикутнику TMN, а трикутник TNK подібний трикутнику TML. З цього робимо висновок, $\frac{LM}{KN} = \frac{TM}{TN} = \frac{TL}{TK} = \frac{3}{7}$, **а**
$\frac{MN}{KL} = \frac{TM}{TL} = \frac{TM}{TN} \cdot \frac{TN}{TL} = \frac{3}{7} \cdot \frac{KD}{KA} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{21}.$

Коментар. Знайдено та обґрунтовано лише перше співвідношення а) – 1 бал.
Знайдено та обґрунтовано обидва співвідношення а) -2 бала.

3.Знайти всі натуральні числа x, що задовольняють рівнянню
$x \cdot 874 = \otimes\otimes\otimes 92$. Праворуч стоїть п'ятицифрове число.

Розв'язання. $x\cdot 874 = 100p + 92,\ 100 \le x\cdot 874 \le 99992 \Rightarrow 13 \le x \le 114$
Щоб число $x\cdot 874$ **закінчувалася на 2, число** x **повинне закінчуватися на 3 або на 8, тобто** $x = 10n + 3$ **або** $x = 10m + 8$**. Тоді**

$$\left[\begin{array}{l} 8740n + 2622 = 100p + 92 \\ 8740m + 6992 = 100p + 92 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 874n + 253 = 10p \\ 874m + 690 = 10p \end{array}\right..$$

Перше рівняння коренів не має, тому що зліва число непарне, а праворуч - парне.
З другого рівняння видно, що m **ділиться на 5, тобто** $m, = 5k$**, тоді** $p = 437k + 69$**. Враховуючи обмеження на** p**, отримуємо** $k = 1$ **або** $k = 2$ **Тоді** $m = 5$ **або,** $m = 10$ **а** $x = 58$ **або** $x = 108$.

Відповідь. 58 або 108.

Коментар. Вгадано одне число з перевіркою, але без пояснень - 1 бал. Вгадані обидва числа з перевіркою, але без пояснень - 2 бали. Знайдені обидва числа неповним перебором, з урахуванням фрази «Щоб число $x\cdot 874$ закінчувалася на 2, число x повинне закінчуватися на 3 або на 8» - 3 бали, а ще й з оцінкою на x - 4 бали.

4. Кожна з точок площини пофарбована в один з трьох кольорів. Довести, що знайдуться дві точки, пофарбовані в один колір, відстань між якими дорівнює 1.

Доведення 1. Припустимо протилежне. Розглянемо рівносторонній трикутник АВС зі стороною 1, всі вершини якого різного кольору. Візьмемо точку A_1**, симетричну точці А відносно прямої ВС. Тоді** A_1 **одного кольору з А і коло з центром А і радіусу** AA_1 **повинно бути пофарбована в той же колір. На цьому колі знайдуться дві точки, відстань між якими дорівнює 1.**
Доведення 2. Розглянемо на площині коло радіуса $\sqrt{3}$ **з центром в точці О. Нехай Р - довільна точка кола, ОАРВ - ромб з діагоналлю ОР і сторонами, рівними 1. Припустимо, що будь-які дві точки, відстань між якими дорівнює 1, пофарбовані в різні кольори. Нехай точка О забарвлена в колір 1, тоді одна з точок А, В зафарбована в колір II, друга - в колір III (оскільки трикутник ОАВ правильний зі стороною 1). З цього випливає, що точка Р, яка знаходиться на відстані 1 від А і В, зафарбована в колір I. Таким чином, всі точки кола пофарбовані в один і той самий колір. Неважко знайти дві точки на ній, відстань між якими дорівнює 1, що суперечить припущенню про те, що такої пари точок не існує. Що і потрібно було довести.**

Коментар. Розглянуто трикутник, але не отримана окружність - 1 -2 бали.

Міська математична олімпіада 11 клас

1. При яких значеннях параметра **а** сума квадратів коренів рівняння $x^2+(a-2)\cdot x+2(a+1)=0$ набуває найменшого значення? Знайти це найменше значення.

Відповідь.

$a=6-2\sqrt{10}.$

$\min f(a)=f\left(6-2\sqrt{10}\right)=4\left(7-2\sqrt{10}\right).$

Розв'язання. Знайдемо суму квадратів коренів рівняння з допомогою теореми Вієта. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2-a)^2-4(a+1)=a^2-8a=f(a)$**. Відомо, що теорема Вієта не дає гарантії існування коренів. Тому потрібно шукати мінімальне значення функції** $f(a)$ **за умови, що дискримінант вихідного квадратного тричлена невід'ємний, тобто**

$D=(a-2)^2-8(a+1)=a^2-12a-4=(a-6)^2-40\ge 0 \Rightarrow x\ge 6+2\sqrt{10}$ **або** $x\le 6-2\sqrt{10}.$

Оскільки на ділянці функція монотонно зростає, а на ділянці функція монотонно убуває, то мінімум досягається в граничних точках. Оскільки точка ближче до вершини параболи, то мінімум саме в ній, тобто. Оскільки на проміжку $x\ge 6+2\sqrt{10}$ **функція** $f(a)$ **монотонно зростає, а на проміжку** $x\le 6-2\sqrt{10}$ **функція** $f(a)$ **монотонно спадає, то мінімум** $f(a)$ **досягається в граничних точках. Оскільки точка** $x=6-2\sqrt{10}$ **розташована ближче до вершини, то мінімум буде саме в цій точці, тобто**

$\min f(a)=f\left(6-2\sqrt{10}\right)=\left(6-2\sqrt{10}\right)^2-8\left(6-2\sqrt{10}\right)=28-8\sqrt{10}=4\left(7-2\sqrt{10}\right).$

Коментар. Відповідь $a=4$ із застосуванням теореми Вієта - 1 бал. Знайдено тільки умову на дискримінант - 1 бал. Дві відповіді: $x=6\pm 2\sqrt{10}$ - 3 бали. Повністю правильне розв'язання з однією відповіддю, але з однією арифметичною помилкою - 6 балів.

2. Довести, що для всіх $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ виконується нерівність

$\cos(\sin x)\succ\sin(\cos x).$

.

Доведення :

1-й спосіб. $\cos\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$

Застосуємо цю формулу до нашого завдання, поклавши, що $\alpha=\sin x,\beta=\cos x.$

Тоді $\alpha+\beta=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\alpha-\beta=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$**Очевидно,** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\frac{\alpha+\beta}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Оскільки

$\frac{\sqrt{2}}{2} \prec \frac{\pi}{4}$, то $0 \prec \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha \pm \beta}{2} \le \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \prec \frac{\pi}{2}$. Таким чином обидва аргументи у синуса і косинуса належать першій чверті і, отже, обидві функції набувають додатних значень. Нерівність вірна для всіх значень x.

Коментар. Записав правильно формулу різниці - 1 бал.

3. Є 100 десятилітрових бутлів. У 1-му з них знаходиться $1 см^3$ води, в 2-му – $2 см^3$, ..., в сотому -$100 см^3$. Дозволяється із бутля А перелити в бутель В, який має не більшу кількість води, стільки води, скільки в ньому вже є. Чи можна після декількох переливань домогтися того, щоб:

а) В бутлях знову виявилося $1 см^3$, $2 см^3$,..., $100 см^3$ води, але при цьому в жодному
з них не було б початкової її кількості?
б) В якихось п'яти бутлях виявилося по $3 см^3$ води, а в інших -$6 см^3$, $7 см^3$, ..., $100 см^3$?

Відповідь. а) Можна. б) Не можна.

Розв'язання. а) Можна. Переливання 100→1, 99→2, ..., 51→50 вийде 2, 4, 6, ..., 100, 1, 3, 5, ..., 99. б) Не можна, так як після таких переливань кількість бутлів з непарним числом $см^3$ не може збільшитися.

Коментар. Вірна відповідь тільки на перше запитання з прикладом - 3 бали. Вірне пояснення тільки другого запитання - 3 бали.

3. Об'єм піраміди ABCD дорівнює 5. Через середини ребер AD і BC проведено площину, що перетинає ребро CD в точці M, при цьому DM: MC = 2: 3. Обчислити площу перерізу піраміди цією площиною, якщо відстань від неї до вершини А дорівнює 1.

Відповідь. S = 3.

Розв'язання. Проведемо пряму через точку M і середину P ребра BC, і нехай L - точка перетину прямих PM і BD. Застосовуючи теорему Менелая до трикутника BCD і прямої PL, отримаємо: $\frac{CP}{BP} \cdot \frac{BL}{DL} \cdot \frac{DM}{CM} = 1$. Звідси $\frac{BL}{DL} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CM}{DM} = \frac{3}{2}$. Позначимо за K середину ребра AD, а за Q - точку перетину прямих KL і AB. Застосовуючи теорему Менелая до трикутника BAD і прямої KL, отримаємо: $\frac{BQ}{AQ} \cdot \frac{AK}{DK} \cdot \frac{DL}{BL} = 1$. Звідси $\frac{BQ}{AQ} = \frac{DK}{AK} \cdot \frac{DL}{BL} = \frac{3}{2}$.
З'єднавши точку Q з точкою P, а точку K з точкою M, отримаємо шуканий переріз PQKM. Зауважимо, що так як AK = KD, то відстань від

точки D до площини PQKM дорівнює відстані від точки A до цій же площини, тобто дорівнює 1. З'єднаємо тепер точку A з точками P і M, а точку D з точками P і Q. І зауважимо, що піраміда ABCD складається з пірамід APQKM, DPQKM, APCM і DPQB. Позначивши за S площу перерізу PQKM, отримаємо:

$$V_{APQKM}+V_{DPQKM}+V_{APCM}+V_{DPQB}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot S+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot S+V_{ABCD}\cdot\frac{CP}{CB}\cdot\frac{CM}{CD}+V_{ABCD}\cdot\frac{BP}{BC}\cdot\frac{BQ}{BA}=\frac{2}{3}S+$$

$$+5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=V_{ABCD}=5.$$

звідки знаходимо, що S = 3.

Коментар. Обґрунтована побудова перерізу піраміди площиною - 1 бал, а якщо іще знайдені відношення $\frac{BL}{DL}=\frac{3}{2}$ і $\frac{BQ}{AQ}=\frac{3}{2}$, то 3 бали.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число $2^{3n+1}+2^{3n+4}+2^{3n}+17$ є складеним.

Доведення: Позначимо наше число символом A_n**. Тоді** $A_n=2^{3n}\cdot 19+17.$ **Знайдемо деякі початкові значення.** $A_1=169$ **ділиться на 13.** $A_2=1233$ **- ділиться на 3 і на 9.** $A_3=9745$ **- ділиться на 5. Доведемо, що при парних n** A_n **ділиться на 3.**

$A_{2k}=8^{2k}\cdot 19+17=(-1)^{2k}\cdot 1-1=0$ **по модулю 3. Доведемо, що при парних n** A_n **ділиться на 9.** $A_{2k}=8^{2k}\cdot 19+17=(-1)^{2k}\cdot 1-1=0$ **за модулем 9. Доведемо, що при** $n=4k+1$ A_n **ділиться на 13.**

$A_{4k+1}=8^{4k+1}\cdot 19+17=64^{2k}\cdot 8\cdot 19+17=(-1)^{2k}\cdot(-5)\cdot 6+4=-26=0$ **по модулю 13.**

Доведемо, що при $n=4k+3$ A_n **ділиться на 5.**

$A_{4k+3}=8^{4k+3}\cdot 19+17=64^{2k}\cdot 8^3\cdot 19+17=(-1)^{2k}\cdot 2\cdot(-1)+2=0$ **по модулю 5.**

Коментар. Доведено, що при парних **n** A_n ділиться на 3 або на 9 - 2 бали.

МАТЕМАТИЧНА КАРУСЕЛЬ

ВИХІДНИЙ РУБІЖ

1. О сьомій годині вечора Петрик поглянув на годинник: хвилинна стрілка була рівно на три хвилинних поділки попереду годинникової стрілки. Який час показували годинник?

Відповідь: 18:36.

2. Знайдіть хоча б один розв'язок рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{90}$ в натуральних числах.

Відповідь: (10; 40) або (40; 10).

3. Послідовність чисел задана наступним чином:
$a_1 = 19$, $a_2 = 99$,
$a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$
Знайдіть a_{1999}.

Відповідь: 19.

4. Яке найменше число авіаліній потрібно для того, щоб з будь-якого міста із 1999 даних можна було добратися в будь-яке інше, зробивши не більше двох пересадок?

Відповідь: 1998.

5. В результаті вимірювання чотирьох сторін і однієї із діагоналей деякого чотирикутника вийшли числа 1, 2; 2,8; 5; 7,5. Чому дорівнює довжина виміряної діагоналі?

Відповідь: 2,8.

6. При стрільбі по мішені Михайлик кілька разів влучив у десятку, стільки ж разів вибив по 8 очок і кілька разів попав у п'ятірку. Всього він набрав 99 очок. Скільки пострілів зробив Михайлик, якщо в 25% спроб він промахнувся?

Відповідь: 20 пострілів.

7. Обчислити:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}+\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{1-2\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}}.$$

Відповідь: $2\sqrt{2}$.

7. Дев'яносто дев'ять прямих розбивають площину на **n** частин. Знайдіть усі можливі значення **n**, менші за **199.**

Відповідь: 100 і 198.

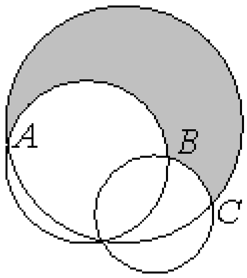
8. Яку найбільшу кількість чисел можна вибрати з набору 1, 2, ..., 1999, щоб сума двох будь-яких вибраних ділилася на 36?

Відповідь: 56.

10. В озері плаває яблуко: 2 / 3 його під водою і 1 / 3 над водою. До нього підпливає рибка і підлітає пташка, які одночасно починають його їсти, причому пташка їсть удвічі швидше, ніж рибка. Яку частину яблука з'їсть пташка?

Відповідь: 2 / 3

11. Три кола проходять через одну точку. Знайдіть суму криволінійних кутів А, В, С в заштрихованій частині більшого кола.



Відповідь: 180 °.

12. Не змінюючи порядку цифр, розставте між цифрами числа 524127 знаки арифметичних дій і дужки так, щоб в результаті вийшло 100.

Відповідь: 5 × (24 + 1 + 2 – 7). Можливі інші варіанти.

13. Скільки існує пар (a, b) натуральних чисел менших 1999, таких, що a^2+b^2

ділиться на 49?

Відповідь: 81225.

14. Знайдіть всі натуральні числа, на які можна скоротити дріб $\frac{5l+6}{8l+7}$ при різних цілих значеннях l.

Відповідь: 13.

15. Скільки існує натуральних чисел, не більших 1999, які не діляться ні на 5,
ні на 7?

Відповідь: 1372 числа.

ЗАЛІКОВИЙ РУБІЖ

1. Завершіть заповнення квадрата літерами Т, А, Б, У, Н так, щоб в кожному рядку, кожному стовпчику і кожній з двох діагоналей квадрата ці букви зустрічалися по одному разу.

Т	А	Б	У	Н
	Т	А	Б	У

Відповідь: по рядкам: ТАБУН, УНТАБ, АБУНТ, НТАБУ, БУНТА.

2. Від тризначного числа відняли суму кубів його цифр. Який найбільший результат міг при цьому вийти?

Відповідь: 396.

3. АН і СР - висоти трикутника АВС. Якою може бути величина кута В, якщо
відомо, що АС = 2НР?

Відповідь: 60 ° і 120 °

4. Позначимо через S (n) суму цифр числа n. Знайдіть найменше натуральне число **n**,
для якого S (S (n)) = 1999.

Відповідь: $1\underbrace{999...9}_{22..2}$ (222 двійки)

5. Скільки різних цілочисельних розв'язків має нерівність $| x |+ | y | <1999$**?**

Відповідь: 7988005.

6.У стаді 10 корів. Перша може з'їсти копну сіна за 1 день, друга - за 2 дні, третя - за 3 дні, ..., десята - за 10 днів. Хто швидше з'їсть цю копну - перші дві корови разом або інші вісім?

Відповідь: перші дві.

7.В одноколовому волейбольному турнірі (без нічиїх) брало участь 23 команди. Три команди А, В, С утворюють циклічну трійку, якщо А виграла у В, В - у С, С - у А. Яка найбільша можлива кількість циклічних трійок?

Відповідь: 506.

8. Розв'яжіть в натуральних числах рівняння $3 \cdot 2^x = y^2 - 1$.

Відповідь: (3, 5) і (4; 7).

9. Банкір Петя щодня виходить з дому на роботу о 8 ранку, на вулиці його зустрічає автомобіль і відвозить на роботу. Одного разу він вийшов з дому раніше і пішов назустріч машині. Завдяки цьому Петя приїхав на роботу на 20 хвилин раніше, ніж зазвичай. Визначте, о котрій годині Петя сів у цей день в автомобіль?

Відповідь: о 7год 50хв**.**

10. Знайдіть всі натуральні числа n такі, що (n - 1)! не ділиться на n^2.

Відповідь: всі прості, всі подвоєні прості, а також 8 і 9.

11.У циферблат годинника додали стрілку, яка в будь-який момент часу утворює рівні кути з годинниковою та хвилинною стрілками (йде по бісектрисі кута). Скільки повних обертів робить ця стрілка протягом доби?

Відповідь: 13 оборотів

12.На стелі кімнати сидить муха. Відстань від неї до трьох з чотирьох нижніх
кутів кімнати дорівнює 3м, 4м і 5м. Чому дорівнює відстань від мухи до четвертого нижнього кута, якщо відомо, що вона більша за всі інші?

Відповідь: $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

13. Назвемо натуральне число гарним, якщо його можна подати у вигляді суми двох тризначних чисел $\overline{abc} + \overline{cba}$, (a і c не рівні 0). Скільки існує хороших чисел?

Відповідь: 170.

14. У турнірі кожен шахіст, який не зайняв одне з трьох останніх місць, половину своїх очок набрав у зустрічі з учасниками, що зайняли три останні місця. (Той хто зайняв третє місце з кінця набрав очок менше, ніж четвертий з кінця). Скільки чоловік взяло участь в турнірі?

Відповідь: 8, 9 або 10.

15. Скількома способами можна подати число 100 у вигляді суми трьох натуральних доданків (подання, що відрізняються лише порядком доданків, вважаються однаковими)?

Відповідь: 833.

Математична регата

7 клас

Перший тур (10 хвилин; кожна задача - 6 балів).

1.1. Чи існують такі натуральні числа a і b, що число b є натуральним степенем числа a і число b в 16 разів більше числа a?

Відповідь: так, існують.

Можливі приклади: a = 2, b = 32 або a = 4, b = 64 або a = 16, b = 256. Можна довести, що інших пар значень a і b, які задовольняють умові задачі, не існує. Дійсно, з умови слідує, що b = a^n і b = 16a, отже, a^n = 16a. Розділивши обидві частини цієї рівності на a (a - натуральне число), отримаємо: a^{n-1} = 16. Так як n - також натуральне число, то a може набувати тільки трьох значень: 2, 4 або 16.

1.2. Один з вимірів прямокутника збільшили на 99 см, а інший - зменшили на 1 см, і отримали новий прямокутник. Чи можна стверджувати, що площа прямокутника збільшилася? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: ні, це стверджувати не можна.

Розглянемо, наприклад, прямокутник ABCD, в якому AB = 2 см, AD = 1000 см (див. рис. 1). Після зменшення сторони AB на 1 см площа прямокутника зменшилася на 1000 кв.см. Збільшивши тепер сторону AD на 99 см, ми додамо до площі прямокутника тільки 99 кв.см. Отже, площа вихідного прямокутника зменшилася.
Зазначимо, що можливий і більш загальний підхід, а саме, якщо вимірювання вихідного прямокутника a см і b см, то вимірювання нового прямокутника –
(a+ 99) см і (b - 1) см. Тоді різниця площ нового і вихідного прямокутників дорівнює

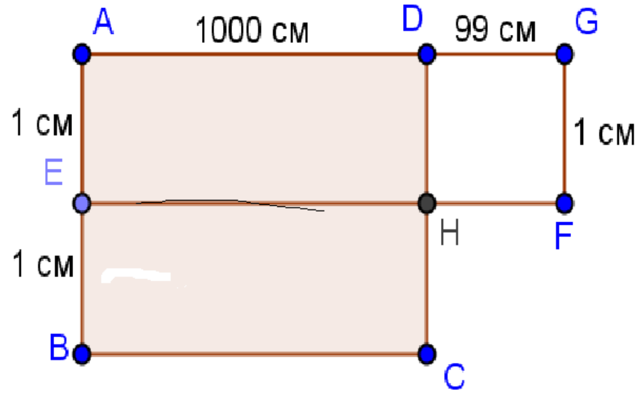


Рис. 1

$(a+99)(b-1)-ab=99b-a-99$. Таким чином, площа вихідного прямокутника збільшиться, якщо виконується нерівність $99b-a-99>0$, тобто $a<99(b-1)$. Будь-які додатні значення a і b, що не задовольняють отриманій нерівності, також можуть служити в якості контрприкладу.

1.3. Незнайко бреше по понеділках, вівторках і п'ятницях, а в інші дні тижня говорить правду. В які дні тижня Незнайко може сказати: «Я брехав позавчора і буду брехати післязавтра»? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: по понеділках, вівторках, середах, п'ятницях і неділях.

Незнайко може сказати фразу, наведену в умові, у двох випадках:
1) у ті дні, коли він говорить правду, якщо за два дні до цього і через два дні після цього він бреше, 2) у ті дні, коли він бреше, якщо за два дні до цього чи через два дні після цього він каже правду.
Послідовною перевіркою всіх семи днів тижня можна переконатися, що цим умовам задовольняють усі дні тижня, крім четверга і суботи.

Другий тур (15 хвилин; кожна задача - 7 балів).

2.1. У будинку двоє механічних годинників: одні відстають на 15 хвилин на добу, а інші на 10 хвилин на добу поспішають. Сьогодні опівдні і ті, й інші годинники показували правильний час. Коли наступного разу вони одночасно покажуть правильний час?

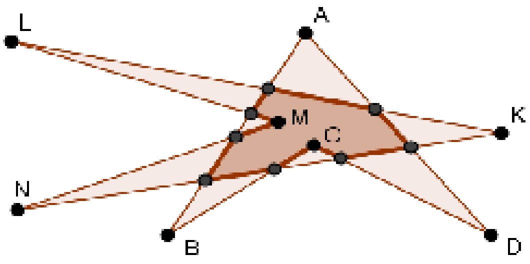
Відповідь: через 144 діб.

Перший годинник відстає на 15 хвилин на добу. Отже, через чотири доби він буде відставати на годину, а через 48 діб відстане на 12 годин, тобто вперше покаже правильний час. Другий годинник буде поспішати на годину через 6 діб, а правильний час вперше покаже, коли буде поспішати на 12 годин, тобто після 72 діб.
Так як НСК (48; 72) = 144, то й той, і інший годинники вперше покажуть правильний час через 144 доби.

2.2. Чи можна так зобразити два чотирикутника, щоб їх загальна частина (перетин) виявилася десятикутником?

Відповідь: так, можна.

Наприклад, див. рис.



Спільна частина чотирикутників ABCD і KLMN є десятикутником. Зазначимо, що шукані чотирикутники повинні бути неопуклих. Також відзначимо, що більше ніж десять вершин у перетині двох чотирикутників отримати не можна. Дійсно, кожна сторона будь-якого з даних чотирикутників може «породжувати» або одну сторону многокутника - перетину, або дві (якщо вона перетинає дві сторони іншого чотирикутника, що утворюють плоский кут, який більший розгорнутого). Оскільки таких кутів не більше двох, то кількість сторін в перетині не більше, ніж $2\cdot 2+6\cdot 1=10$.

2.3. В поїзді Київ - Тьмутаракань ввели суцільну нумерацію місць у вагонах. В усіх вагонах однакова кількість місць. Відомо, що місця 385 та 416 знаходяться в одному вагоні, а місця 544 та 577 знаходяться в різних вагонах, причому ці вагони - не сусідні. Скільки місць в одному вагоні? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 32 місця.

Оскільки місця 385 та 416 знаходяться в одному вагоні, то кількість місць у вагоні не менше, ніж 416 - 385 +1 = 32. З іншого боку, між місцями 544 і 577 знаходиться 577 - 544 - 1 = 32 місця. Це означає, що в одному вагоні не більше, ніж 32 місця. Таким чином, у вагоні рівно 32 місця.

Третій тур (15 хвилин; кожна задача - 7 балів).

3.1. При яких значеннях k прямі $y = kx$ та $y = x + 1$ перетинаються в першій
координатній чверті?

Відповідь: при $k > 1$.

Нехай $M(x_0; y_0)$ - точка перетину даних прямих, тоді справедливі рівності $y_0 = kx_0$ $y_0 = x_0 + 1$. Точка М буде знаходитись в першій координатній чверті тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються дві нерівності: $x \succ 0$ та $y \succ 0$.Виражаємо спочатку x_0, прирівнявши праві частини записаних рівностей:
$kx_0 = x_0 + 1$**;**
$(k-1)x_0 = 1$. **При k = 1 це рівняння коренів не має, тому, $x_0 = \frac{1}{k-1}$ де $k \neq 1$.**
Отже, $x_0 \succ 0$ якщо k > 1.

Виразимо тепер y_0, використовуючи, наприклад, що $y_0 = kx_0$. Отримаємо, що $y_0 = \frac{k}{k-1}$. При k > 1 нерівність $y_0 \succ 0$ точно виконується. Таким чином, точка М знаходиться в першій координатній чверті за k > 1.

Зазначимо, що при k = 1 дані прямі паралельні, а при k <1 - перетинаються, але не в першій чверті. Збігатися ці прямі не можуть ні за яких значень k .

3.2. У прямокутному трикутнику ABC точка K - середина гіпотенузи AB, а точка
М ділить катет AC у відношенні 2: 1 (рахуючи від вершини A). Знайдіть гострі кути трикутника ABC, якщо відрізок MK перпендикулярний AB.

Відповідь: 30° і 60°.

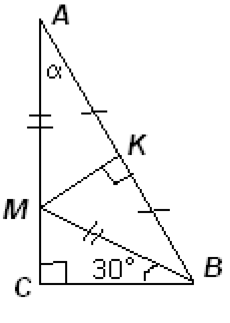


Рис.3

Проведемо відрізок MB, тоді MK - медіана і висота трикутника AMB (див. рис. 3). Отже, трикутник AMB - рівнобедрений: MB = MA. Тоді в прямокутному трикутнику CBM катет CM в два рази менший гіпотенузи MB, отже, кут

СВМ дорівнює 30 °.
Нехай $\angle CAB = \alpha$ тоді $\angle ABM = \angle CAB = \alpha$ (за властивістю рівнобедреного трикутника). В прямокутному трикутнику АВС сума гострих кутів дорівнює
90 °, тому, 2α+30 ° = 90 °, тобто α= 30 °. Отже, $\angle CAB = 30^\circ$ $\angle CBA = 60^\circ$.

В заключній частині розв'язання можна було робити інакше: у трикутнику СМВ один з гострих кутів дорівнює 30°, тому іншої гострий кут дорівнює 60° Цей кут СМВ - зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника АМВ, тому він дорівнює 2α, а тому, α = 30 °.

3.3. В шаховому турнірі кожен учасник зіграв з кожним по одній партії. Переможець виграв у всіх і набрав в 5 разів менше очок, ніж всі інші разом. Скільки було учасників? (Перемога - 1 очко, нічия - 0,5 очка, поразка - 0 очок)

Відповідь: 12 учасників.

Нехай у турнірі брало участь n шахістів, тоді кожен з них зіграв n - 1 партію. Всього в турнірі було зіграно $\frac{n(n-1)}{2}$ партій, при цьому без участі переможця було зіграно - $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ партій.
Зауважимо, що в кожній партії між учасниками розігрується 1 очко. Тому переможець набрав n - 1 очко, а всі інші разом набрали $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ очок.
Враховуючи умову задачі, складаємо рівняння: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 5(n-1)$. Так як n> 1, то розв'язком рівняння є тільки n = 12.

Четвертий тур (20 хвилин; кожна задача - 8 балів).

4.1. Чи існують такі три різні числа a, b і c, що a (b - c) = b (c - a) = c (a - b)?

Відповідь: ні, не існують.

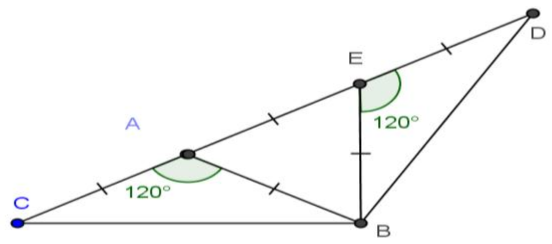
Перший спосіб. Нехай a (b - c) = b (c - a) = c (a - b) = x, тоді 3x = a (b - c)+ b (c - a) +c (a - b) = ab – ac+ bc - ba +ca - cb = 0, тобто x = 0.

Якщо a (b - c) = 0 і b ≠ c (за умовою), то a = 0. Аналогічно, якщо b(c - a) = 0 і c≠a то b = 0. Таким чином, a = b, що суперечить умові.

Другий спосіб. Перетворимо рівність a (b - c) = b (c - a): ab - ac = bc - ab, тобто

$ab = \frac{ac + bc}{2}$ **. Аналогічно, з рівності b (c - a) = c (a - b) отримаємо, що,**
$bc = \frac{ab + ac}{2}$ **а з рівності a (b - c) = c (a - b) отримаємо, що** $ac = \frac{ab + bc}{2}$.
Отже, кожне з трьох чисел ab, bc і ac є середнім арифметичним двох інших. Якщо ці числа різні, то таке неможливо, оскільки середнє арифметичне будь-яких двох різних чисел більше одного з них і менше іншого. Таким чином, ab = bc = ac. Але з рівності ab = bc і умови a ≠ c випливає, що b = 0. Аналогічно, з рівності bc = ac і умови a≠b випливає, що c = 0. Це означає, що, b = c, а це суперечить умові задачі.

4.2. Трикутник ABC - рівнобедрений, $\angle$BAC = 120°. На продовженні сторони AC за вершину A позначено точку D так, що AD = 2AB. Доведіть, що трикутник BDC - також рівнобедрений.



Нехай **E - середина відрізка AD, тоді AE = $= \frac{1}{2}$AD = AB (див. рис. 4). Так як $\angle$ BAC = 120°, то суміжний з ним кут BAE дорівнює 60°. Таким чином, трикутник BAE - рівнобедрений з кутом 60° при вершині, отже, трикутник BAE - рівносторонній.**
Рис. 4
Крім того $\angle BED = 180^\circ - \angle AEB = 120^\circ$**. Отже, трикутники BAC і BED рівні за двома сторонами та кутом між ними. Це означає, що BD = BC, тобто трикутник BDC - рівнобедрений.**
Останню частину міркувань можна провести інакше.

4.3. На екрані комп'ютера було записано число 123456789. Вася так вставив пробіли між деякими цифрами цього числа, що воно розбилося на кілька частин, причому числа, записані в будь-яких двох частинах, виявилися взаємно простими. Яка найбільша кількість частин могла при цьому утворитися? (Нагадаємо, що взаємно простими називаються натуральні числа, у яких є рівно один спільний дільник - одиниця.)

Відповідь: шість.

Зауважимо, що з чотирьох парних цифр: 2, 4, 6 і 8 одну цілу частину може скласти не більше, ніж одна. Інші три зобов'язані увійти в частину, що складаються з двох або більше цифр (причому увійти не в якості останньої цифри). Це означає, що частин не може бути більше шести (три частини по дві цифри і три частини по одній цифрі).
Наведемо один з можливих прикладів розбиття даного числа на шість частин:
1 23 4 5 67 89.

8 клас

Перший тур (10 хвилин; кожна задача - 6 балів).

1.1. Обчисліть (не використовуючи мікрокалькулятор): $\sqrt{2009 \cdot 2011 + 1}$.

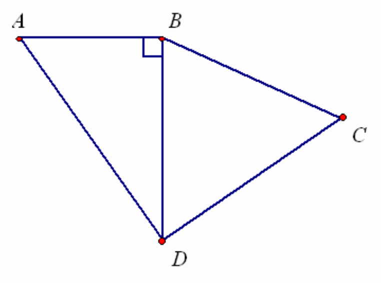
Відповідь: 2010.

$\sqrt{2009 \cdot 2011 + 1} = \sqrt{(2010 - 1) \cdot (2010 + 1) + 1} = \sqrt{2010^2 - 1 + 1}$ = 2010.

1.2. Встановити вид чотирикутника, в якому кожна діагональ розбиває його на два прямокутних трикутники. Відповідь поясніть.

Відповідь: прямокутник.

Нехай ABCD - шуканий чотирикутник (див. рис.). Розглянемо одну з його діагоналей, наприклад, BD. За умовою, трикутник ABD - прямокутний. Доведемо, що прямим може бути тільки кут з вершиною A.



Дійсно, якщо, наприклад, кут ABD - прямий, то кут ABC - тупий, що суперечить умові, оскільки трикутник ABC - вже не прямокутний.

Аналогічно, в будь-якому з трикутників, які утворюються при розбитті, прямий кут лежить напроти діагоналі чотирикутника. Отже, вершинами прямих кутів є вершини чотирикутника, тобто ABCD - прямокутник.

1.3. З опівдня до опівночі Вчений Кіт спить під дубом, а з опівночі до полудня розповідає казки. На дубі він повісив плакат: «Через годину я буду робити те ж саме, що робив дві години тому». Скільки годин на добу цей напис правильний?

Відповідь: 18 годин.

З'ясуємо проміжки часу, в які напис є хибним. Вони починаються за годину до того моменту, коли Кіт змінює вид діяльності, і тривають ще 2 години після цього моменту. Таким чином, напис є хибним з 11 до 14 годин і з 23 годин до 2 годин, тобто 6 годин на добу. В інший час напис правильний, отже, він правильний 18 годин на добу.

Другий тур (15 хвилин; кожна задача - 7 балів).

2.1. Знайдіть передостанню цифру в десятковому запису числа
$S = 2009^{2008} + 2009^{2009}$.

Відповідь: 1.

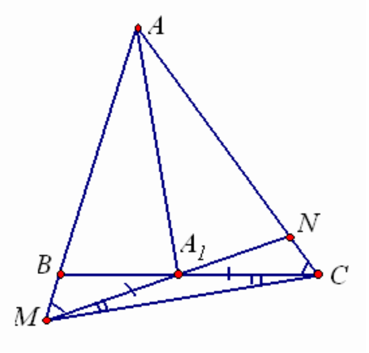
1) Так як
$2009^{2008} + 2009^{2009} = 2009^{2008}(1+2009) = 2009^{2008} \cdot 2010 = 2009^{2008} \cdot 2000 + 2009^{2008} \cdot 10$**, то передостання цифра числа S збігається з останньою цифрою числа** 2009^{2008}**.**

2) Остання цифра числа 2009^{2008} **збігається з останньою цифрою числа** 9^{2008}**. Так як** $9^{2008} = 81^{1004}$**, то остання цифра цього числа - 1.**

Отже, передостання цифра числа S - 1.

2.2. У трикутнику ABC довжини сторін попарно різні. На сторони AB і AC кута
BAC вибираються точки M і N відповідно так, що AM = AC і AN = AB. Відрізок MN перетинається зі стороною BC в точці A_1. Аналогічно, на сторонах кута ABC вибираються точки K і L так, що BK = BC і BL = BA, B_1 - точка перетину KL і AC. Точка C_1 на стороні AB також визначається аналогічно. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

З умови задачі випливає, що $\Delta AMN = \Delta ACB$ **(AM = AC, AN = AB, кут A - спільний, див. рис.), отже,** $\angle AMN = \angle ACB$**. Крім того, з рівнобедреного трикутника AMC отримаємо, що** $\angle AMC = \angle ACM$ **. Отже,** $\angle A_1MC = \angle A_1CM$ **, тому,**



трикутник A_1**CM - також рівнобедрений:** $MA_1 = CA_1$**. Тоді** $\Delta AMA_1 = \Delta ACA_1$ **(за трьома сторонами), звідки випливає, що,**
$\angle BAA_1 = \angle CAA_1$ **тобто** AA_1 **- бісектриса кута CAB. Аналогічно доводиться, що** BB_1 **і** CC_1 **- також бісектриси трикутника ABC. Отже, ці три відрізки перетинаються в одній точці (центрі кола, вписаного в трикутник ABC).**

Зазначимо, що наведене міркування показує, що пряма AA_1 **є віссю симетрії кута BAC.**

2.3. Є три злитка з масами 1, 2 і 3 кг. Процентний вміст золота в різних злитках - різний (але невідомий). Кожен злиток треба розділити на три частини і виготовити з них три нових злитка з тими ж масами 1, 2 і 3 кг так, щоб процентний вміст золота в усіх нових злитках став б однаковим (незалежно від того, яким воно було у вихідних шматках). Поясніть, як це можна зробити.

Відповідь: кожен злиток можна розділити у відношенні 1: 2: 3 і сплавити разом менші частини шматків, середні і великі.

Сумарна маса шматків - 6 кг. Так як маса першого сплаву складає $\frac{1}{6}$ **частину від цієї суми, маса другого сплаву -** $\frac{1}{3}$ **частину, а маса третього сплаву -** $\frac{1}{2}$**, то нові злитки будуть мати необхідні маси.**

Пояснити, чому вміст золота в нових злитках стане однаковим, можна по-різному.

Один із способів («арифметичний»). Маси другого і третього сплавів більші, за масу першого сплаву, в 2 і в 3 рази відповідно. При цьому у другий сплав з кожного початкового злитку взято в 2 рази більше золота, ніж у перший сплав, а в третій сплав з кожного злитку взято в 3 рази більше золота, ніж у перший.

Можна довести, що спосіб, наведений у відповіді, - єдиний (від школярів це не потрібно).

Третій тур (20 хвилин; кожна задача - 8 балів).

3.1. Розкладіть число $2^{202}+1$на два множника, кожен з яких не менший мільйона.

Відповідь: $2^{202}+1=\left(2^{101}+2^{51}+1\right)\left(2^{101}-2^{51}+1\right)$.

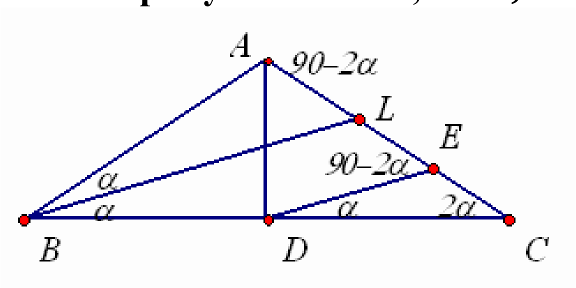
Нехай $2^{50}=x$**, тоді даний вираз набуде вигляду** $4x^4+1$**. Розкладемо цей вираз на множники:** $4x^4+1=4x^4+4x^2+1-4x^2=\left(2x^2+1\right)^2-\left(2x\right)^2=\left(2x^2+2x+1\right)\left[2x^2-2x+1\right]$**.**

Таким чином, $2^{202}+1=\left(2^{101}+2^{51}+1\right)\left(2^{101}-2^{51}+1\right)$ **що і було потрібно, оскільки** $2^{101}+2^{51}+1\succ 2^{101}-2^{51}+1\succ 2^{100}=\left(2^{10}\right)^{10}=1024^{10}\succ 1000^{2}=1000000$**.**

3.2. В рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC бісектриса BL вдвічі більше висоти AD. Знайдіть кути трикутника.

Відповідь: два кути по 36 ° і кут 108 °.

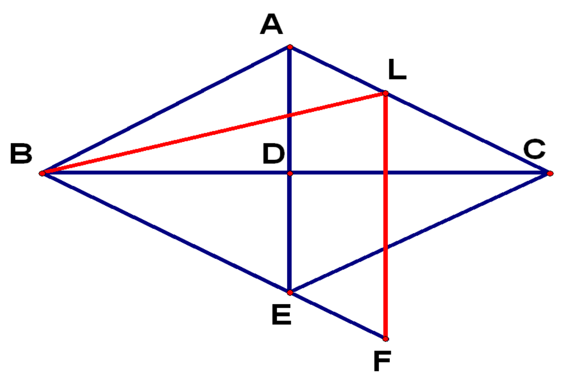
Перший спосіб. Нехай $\angle ABC=2\alpha$**. Проведемо відрізок DE паралельно BL (точка E - на стороні AC, див. рис.). Тоді кут AED - зовнішній для трикутника EDC, отже,** $\angle AED=\alpha+2\alpha=3\alpha$**.**



За теоремою Фалеса точка E - середина відрізка CL, тобто DE - середня лінія трикутника LBC. Отже, DE = $\frac{1}{2}$ **BL = AD, тобто трикутник ADE - рівнобедрений. Тоді** $\angle AED=\angle EAD=90^{\circ}-2\alpha.$

Таким чином, $90^{\circ}-2\alpha=3\alpha\Leftrightarrow\alpha=18^{\circ}$**. Отже,** $\angle ABC=\angle ACB=2\alpha=36^{\circ};\angle BAC=108^{\circ}.$

Другий спосіб. Позначимо на промені AD таку точку E, що ED = AD, тоді AE = BL (див. рис.).



Так як висота AD є також і медіаною трикутника ABC, то отриманий чотирикутник ABEC - ромб. Через точку L проведемо пряму LF, паралельну AE (F - точка її перетину з прямою BF). За побудовою, ALFE - паралелограм, отже, LF = AE = BL, тобто трикутник BLF - рівнобедрений.

Нехай $\angle LBC=\alpha$**, тоді** $\angle ACB=\angle ABC=2\alpha,\angle DAC=\angle LFB=\angle LBF=3\alpha$**. З прямокутного трикутника DAC отримаємо, що** $2\alpha+3\alpha=90^{\circ}$**, тобто α= 18 °.**

Отже, $\angle ABC=\angle ACB=36^{\circ};\angle BAC=108^{\circ}.$

3.3. Після закінчення навчального року Михайло вирішив вирвати зі свого підручника з математики всі листки, на кожному з яких сума номерів сторінок (на обох сторонах листка) є квадратом цілого числа, а Гриць зібрався вирвати всі листки, для яких ця ж сума є кубом цілого числа. Хто з них завдасть підручника більший збиток?

Відповідь: Якщо в підручнику, не менше, ніж 7 листків, то більший збиток завдасть Гриць, інакше - шкоди не буде.

На кожному листку одна сторінка має непарний номер, а інша - парний, причому непарне число менше парного. Запишемо непарне число у вигляді 2n - 1, тоді парне дорівнюватиме 2n, де n - натуральне число. Сума номерів сторінок на одному листку дорівнює 4n - 1.

Доведемо, що число такого виду (що має остачу 3 при діленні на 4) не може бути квадратом цілого числа. Дійсно, якщо число k - парне, тобто k = 2m (m - ціле), то $k^2 = 4m^2$**, отже , його квадрат ділиться на 4 без остачі. Якщо ж число k непарне, тобто k = 2m - 1, то** $k^2 = (2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4(m^2 - m) + 1$**, отже, його квадрат має остачу 1 при діленні на 4.**

Таким чином, Мишко в будь-якому випадку не вирве з підручника жодного листка. При цьому, 13 +14 = 27 = 3^3**, тобто якщо в підручнику - хоча б 7 листків, то Гриць напевно зможе вирвати сьомий листок з номерами сторінок 13 і 14.**

Відзначимо, що куби непарних чисел мають ту саму остачу при діленні на 4, що і самі числа.

Четвертий тур (25 хвилин; кожне завдання - 9 балів).

4.1. Порівняйте x і z, якщо відомо, що x+yzt = y+ztx = z+txy = t+xyz і x> y, z> t.

Відповідь: x = z.

Перший спосіб. 1) Перетворимо перше рівність: x+yzt = y+ztx $\Leftrightarrow$
x - y = zt (x - y).
Так як x ≠y, то zt = 1.

2) Аналогічно, з останньої рівності: z+txy = t+xyz $\Leftrightarrow$ **z - t = xy (z - t).**
Так як z ≠ t, то xy = 1.

3) Оскільки x> y і xy = 1, то 0 <y <1 або y <-1. Аналогічно, z> t і zt = 1, отже, 0 <t <1 або t <-1. Отже, yt ≠ 1.

4) Перетворимо іще одну дану рівність: x +yzt = z+txy $\Leftrightarrow$ **(x - z) - yt (x - z) = 0** $\Leftrightarrow$ **(x - z) (1 - yt) = 0. Так як yt≠1, то x = z.**

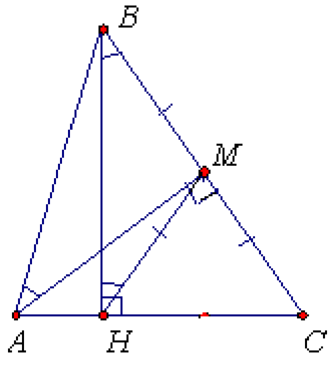
Другий спосіб (для тих, хто вже знайомий з квадратними рівняннями). Зауважимо, що $zt \neq 0$, інакше з першого рівності випливає, що $x = y$. Аналогічно, $xy \neq 0$, інакше з останньої рівності випливає, що $z = t$. Таким чином, $x \neq 0$,
$y \neq 0$, $z \neq 0$ і $t \neq 0$.

Нехай $x+yzt = y+ztx = z+txy = t+xyz = A$, $xyzt = B$, тоді

$$\begin{cases} x+\dfrac{B}{x}=A, \\ y+\dfrac{B}{y}=A, \\ z+\dfrac{B}{z}=A, \\ t+\dfrac{B}{t}=A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-Ax+B=0, \\ y^2-Ay+B=0, \\ z^2-Az+B=0, \\ t^2-At+B=0. \end{cases}$$

Отже, числа x, y, z і t є корінням одного і того ж квадратного рівняння $p^2-Ap+B=0$. Так як квадратне рівняння має не більше двох коренів, а за умовою $x> y$ і $z> t$, то $x = z$ і $y = t$.

4.2. У трикутнику ABC медіана AM дорівнює висоті BH. Крім того, кути MAB і
HBC також рівні. Доведіть, що трикутник ABC - рівносторонній.



З умови задачі випливає, що HM - медіана прямокутного трикутника BCH, проведена до гіпотенузи, отже, HM = ½BC = BM. Тоді трикутник BMH - рівнобедрений, а це означає що , $\angle MHB = \angle HBC$. Використовуючи також, що $\angle HBC = \angle MAB$ (за умовою), то отримаємо, що $\angle MHB = \angle MAB.$.

Таким чином, відрізок BM видно з точок A і H під однаковими кутами, тому точки A, B, M і H лежать на одному колі. Так як прямий кут AHB -

вписаний, то AB - діаметр цього кола, тоді вписаний кут AMB - також прямий.

Це означає, що медіана AM трикутника ABC є також і його висотою, тому трикутник ABC - рівнобедрений: AB = AC. Крім того, рівними є і прямокутні трикутники AMC та BHC (AM = BH, кут C - спільний). Отже, AC = BC. Таким чином, трикутник ABC - рівносторонній, що і потрібно було довести.

4.4. Знайдіть всі натуральні числа, які можна подати у вигляді суми двох взаємно простих чисел, відмінних від 1.

Відповідь: всі натуральні числа, крім 1, 2, 3, 4 і 6.

Розглянемо спочатку непарні числа. Очевидно, що числа 1 і 3 вказаним способом подати не можна. Нехай N - непарне та $N \geq 5$. Тоді $N = 2k + 1 = k + (k+1)$, де k - натуральне і $k \geq 2$. Так як будь-які два послідовних натуральних числа взаємно прості, то всі зазначені N задовольняють умові.

Розглянемо парні числа. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що числа 2, 4 і 6 не можна подати вказаним чином. Решту парних чисел можна розбити на дві групи: числа, кратні 4, тобто $N = 4k$, і числа, не кратні 4, тобто $N = 4k+2$ (k - натуральне і $k \geq 2$).

В першому випадку: $N = 4k = (2k+1)+(2k-1)$, причому НСД $(2k+1; 2k-1) =$ $=$НСД $(2k-1, 2) = 1$. В другому випадку: $N = 4k+2 = (2k+3)+(2k-1)$, причому НСД $(2k+3; 2k-1) =$ НСД $(2k-1, 4) = 1$.

Для непарних чисел, починаючи з 5, можливо також і інше подання, яке задовольняє умові: якщо $k \geq 2$, то $N = 2k+1 = 2+(2k-1)$.